Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

Бакалавр

на тему **«Параметричні поверхневі хвилі в ідеальній рідині»**

Виконав: студентки групи МП41
IV курсу,
спеціальності 113
Прикладна математика
Алексєєва А.М.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук
доцент кафедри
прикладної математики
Пославський С.О.

Рецензент: доктор техн. наук
професор
Ромашов Ю.В.

Харків — 2023 рік

Анотація

Алексєєва А. М. Параметричні поверхневі хвилі в ідеальній рідині

Дипломна робота містить: 26 сторінки, 3 рисунка, 1 додаток, 6 джерел літератури.

Мета роботи: теоретично та у комп'ютерному експерименті дослідити параметричні поверхневі хвилі в ідеальній рідині.

Об'єктом дослідження є математична модель процесу збудження параметричних поверхневих хвиль.

Розглянуто проблеми стійкості рівноваги і збудження хвиль на горизонтальній вільній поверхні рідини у посудині, що здійснює вертикальні коливання. Вивчаються лінійні та нелінійні параметричні хвилі.

Ключові слова: гармонічні коливання, амплітуда, частота, вільна поверхня рідини, збурена поверхня, хвилі Фарадея.

Alekseeva A. M. Parametric surface waves in an ideal liquid

The thesis contains: 26 pages, 3 figures, 1 appendix, 6 sources of literature.

The purpose of the work: theoretically and in a computer experiment to investigate parametric surface waves in an ideal liquid.

The object of research is a mathematical model of the process of excitation of parametric surface waves.

The problems of stability of equilibrium and excitation of waves on the horizontal free surface of a liquid in a vessel performing vertical oscillations are considered. Linear and nonlinear parametric waves are studied.

Key words: harmonic oscillations, amplitude, frequency, free liquid surface, disturbed surface, Faraday waves.

Зміст

Вступ

Поверхневі параметричні хвилі – це особливий тип хвиль, які виникають на поверхні рідини внаслідок впливу зовнішніх збурень. Вони можуть бути створені, наприклад, в результаті коливань поверхні рідини або зміни форми посудини, в якій знаходиться рідина.

Ці хвилі мають властивості, які відрізняють їх від звичайних хвиль на поверхні рідини. Вони є параметричними, так як їх характеристики залежать від параметрів системи, таких як амплітуда збурення, частота та ін. Крім того, поверхневі параметричні хвилі можуть мати незвичайну форму, наприклад, вони можуть утворювати хвилі, що біжать, стійкі стоячі хвилі і т.д.

Вивчення поверхневих параметричних хвиль має значення як для фундаментальних наук, так і для практичних застосувань. Наприклад, вони можуть використовуватися для створення енергетичних установок на основі хвильової енергії, для контролю та управління процесами на поверхні рідини в різних технічних пристроях, а також для вивчення особливостей взаємодії хвиль з іншими об'єктами рідини.

Параметрично збуджені хвилі на поверхні рідини є одним із типів нелінійних хвильових явищ, що виникають за наявності параметричної нестійкості.

У разі поверхневих хвиль на шарі рідини параметрична нестійкість може виникнути за наявності зовнішніх періодичних збурень, наприклад, при вертикальних коливаннях піддону з рідиною. Внаслідок цього виникає модуляція поверхні рідини, яка призводить до збудження параметричних хвиль на поверхні рідини.

Мета даної роботи - теоретично та у комп'ютерному експерименті дослідити параметричні поверхневі хвилі в ідеальній рідині. Для досягнення цієї мети необхідно виконати такі задачі:

- Розглянути умови виникнення та основні властивості параметричних поверхневих хвиль;

- Дослідити математичну модель для опису параметричних поверхневих хвиль в ідеальній рідині з урахуванням нелінійних ефектів.

Розділ 1. Гідродинамічна задача про стійкість вільної поверхні рідини у посудині, що здійснює вертикальні коливання

1.1. Постановка задачі

Розглядається стійкість плоскої вільної поверхні рідини, яка знаходиться в посудині, що здійснює вертикальні гармонічні коливання з амплітудою a і частотою 2ω. Для закритичної області значень параметрів розглядається питання про врахування нелінійності коливань. [1], [5]

Позначимо шар рідини через Ω, вільну поверхню рідини через Γ, S-тверде дно.

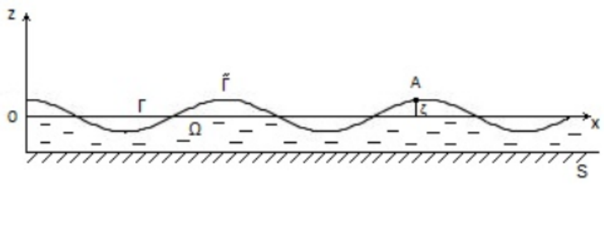

Рис. 1.1: До постановки задачі

Передбачається, що рідина ідеальна (нестислива) і капілярна. Над рідиною знаходиться газ, густина якого зневажливо мала порівняно із густиною рідини

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} gradp + \vec{g} - 4a\omega^2 \vec{e}_z \cos 2\omega t, \tag{1.1}$$

$$div\vec{v} = 0 \tag{1.2}$$

Тут $\vec{v}$ – швидкість рідини; ρ - її густина; р – тиск; $\vec{e}_z$ – одиничний вектор, спрямований вертикально вгору. Останній доданок у рівнянні (1.1) являє собою об'ємну густину переносної сили інерції (питому силу інерції), яку необхідно враховувати при розгляді руху рідини в системі координат, пов'язаній з посудиною, що коливається. Нехай $z = z(t)$- закон руху посудини. В якості такого закону вибиратиметься гармонійний закон коливань $z(t) = -a \cos 2\omega t$. Тоді питома сила інерції визначається формулою

$$\vec{f} = -\rho \ddot{z}(t)\vec{e}_z = -4a\rho\omega^2 \vec{e}_z \cos 2\omega t \tag{1.3}$$

У стані рівноваги рідина передбачається нерухомою $\vec{v}_0 = 0$, розподіл гідростатичного тиску має вигляд

$$p_0 = -\rho(g + 4\alpha\omega^2 \cos 2\omega t)z + p_\alpha \tag{1.4}$$

Поверхня розділу в стані рівноваги є площиною $z = 0$, за припущенням, що крайовий кут змочування дорівнює 90 градусів.

Змочування - це поверхневе явище, що полягає у взаємодії рідини з поверхнею твердого тіла чи іншої рідини. Ступінь змочування характеризується кутом змочування. *Кут змочування* (або крайовий кут змочування) - це кут, утворений дотичними площинами до міжфазних поверхонь, що обмежує рідину, що змочує, а вершина кута лежить на лінії розділу трьох фаз. Тоді на верхній частині розділу буде виконуватися умова безперервності тиску

$$p_0 = p_a \tag{1.5}$$

де p_α - заданий атмосферний тиск.

Умова (1.5) випливає з більш загальної динамічної умови

$$< p >= -2aK,$$

де К - кривизна поверхні рідини, $< p >$ означає стрибок укладеної в них величини $< p >= p_1 - p_2$. Права частина є капілярним стрибком тиску (тиск Лапласа).

1.2. Лінеаризація рівнянь

Введемо функцію ζ, яка описує відхилення поверхні рідини від незбуреного стану у напрямку вертикальної осі, $z = \zeta(t, x)$. Розглянемо малі рухи рідини щодо рівноважного стану. Для цього представимо поле швидкостей тиску рідини у вигляді

$$p = p_0 + p', \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \tag{1.6}$$

де $p', \vec{v}'$ - малі відхилення відповідних величин щодо їх рівноважних значень $p_0, \vec{v}_0$.

Підставимо розкладання (1.6) в рівняння руху (1.1). В силу умов рівноваги (1.4) для збурених величин отримаємо рівняння руху

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p \tag{1.7}$$

$$\vec{v} = \nabla \varphi,$$

$$\Delta\varphi = 0 \textit{ всередині } \Omega$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \textit{ на } \mathrm{S}$$

У цьому рівнянні (як зазвичай у лінійній теорії) опущені квадратичні по $\vec{v}'$ доданки.

Надалі «штрихи», що позначають збурення гідродинамічних величин, опускатимемо.

Розглядатимемо безвихровий рух ідеальної рідини, $rot\vec{v} = 0$. Тоді можна ввести потенціал поля швидкостей $\vec{v} = \nabla\varphi$. З рівняння (1.2) випливає, що у всьому обсязі рідини для потенціалу швидкості маємо рівняння

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1.8}$$

А з рівняння руху (1.7) випливає інтеграл Коші-Лагранжа [1]:

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + p' = 0. \tag{1.9}$$

У кожній точці поверхні посудини нормальна похідна потенціалу швидкості повинна дорівнювати нулю

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \tag{1.10}$$

для кожного моменту часу, тобто на твердих стінках виконується умова непротікання.

На вільній поверхні має місце кінематична умова

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \zeta_t \textit{ на } \Gamma \tag{1.11}$$

Підставляючи (1.6) в умову на збуреній поверхні рідини

$$< p >_\Gamma = -2\alpha K$$

де

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$
$$2K = div\vec{n},$$
$$div\vec{n} = -\frac{\partial \zeta_x}{\partial x},$$

можна записати

$$< p + p_0|_\Gamma + \frac{\partial p_0}{\partial z}\zeta >= -2\alpha K = -\alpha \Delta_\Gamma \zeta.$$

Динамічна умова на збуреній поверхні зноситься на незбурену поверхню Γ

$$< p + \frac{\partial p_0}{\partial z}\zeta >= -\alpha \Delta_\Gamma \zeta,$$

тоді

$$p + \frac{\partial p_0}{\partial z}\zeta = -\alpha \Delta_\Gamma \zeta, \qquad (1.12)$$
$$\Delta_\Gamma \zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

З умови на лінії контакту рідини, газу та стінки посудини (заданий кут змочування для простоти вважатимемо рівним $\beta = \pi/2$) випливає умова на функцію $\zeta(t, x)$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \textit{ на } \mathrm{S}.$$

(1.12) з урахуванням (1.4) та (1.9) має вигляд динамічної умови:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (g + 4a\omega^2 \cos 2\omega t)\zeta - \frac{\alpha}{\rho}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0.$$

Отже, ми маємо таку математичну постановку задачі:

$$\begin{array}{l}
\Delta\varphi = 0 \ \text{ на } \ \Omega \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \mathrm{S} \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \zeta_t \ \text{ на } \ \Gamma \ \ \text{(кінематична умова)} \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + (g + 4a\omega^2 \cos 2\omega t)\zeta - \dfrac{\alpha}{\rho}\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \ \ \text{(динамічна умова)} \\
\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \ \text{ на } \ \mathrm{S}
\end{array}$$

1.3. Метод дослідження

Функцію ζ знаходимо у вигляді періодичної по x функції, що задовольняє крайових умов на кут змочування:

$$\zeta = c(t)\cos(kx). \tag{1.13}$$

Потенціал поля швидкостей будемо шукати також у вигляді періодичної по x функції

$$\varphi = \dot{c}(t)\frac{\cosh(k(z+h))}{k\sinh(kh)}cos(kx). \tag{1.14}$$

Підставивши розкладання (1.13) та (1.14) в динамічну умову, отримаємо рівняння

$$(\frac{\coth(kh)}{k}\ddot{c} + (g + 4a\omega^2\cos 2\omega t)c + \frac{\alpha}{\rho}k^2 c)\cos(kx) = 0.$$

Звідси випливає

$$\ddot{c} + k\tanh(kh)(g + 4a\omega^2\cos 2\omega t + \frac{\alpha}{\rho}k^2)c = 0. \tag{1.15}$$

Дослідження стійкості вихідної гідродинамічної системи зводиться до вивчення стійкості тривіального розв'язку ЗДУ (1.15) для різних значень k. Висновок про стійкість тривіального розв'язку рівняння (1.15) робитимемо на підставі загальної теорії Флоке-Ляпунова.

Розділ 2. Стійкість тривіального розв'язку лінійних диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами

З основами загальної теорії Флоке-Ляпунова можна ознайомитись за книгою [2].

Дослідження стійкості руху багатьох систем часто зводиться до аналізу лінійних диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами. У матричній формі ці рівняння можуть бути записані так:

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{2.1}$$

У цьому рівнянні x – матриця стовпець або вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

а $P(t)$ – квадратна матриця

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{1,1}(t) & \dots & p_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}(t) & \dots & p_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

Будемо вважати, що всі елементи $p_{k,j}(t)$ матриці $P(t)$, а отже, і сама матриця P є періодичними функціями часу t одного і того ж періоду T, так що для будь-якого моменту часу t справедлива рівність

$$P(t+T) = P(t)$$

Для отримання критеріїв стійкості таких систем коротко зупинимося на деяких загальних питаннях теорії лінійних диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами, що належить Флоке.

Сукупність n лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.1)

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \; x_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{pmatrix}$$

називається *фундаментальною системою* розв'язків цього рівняння, а матриця

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

або, що те саме,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} \end{pmatrix}$$

називається *фундаментальною матрицею.* Тут перший індекс елемента $x_{k,j}$ позначає номер функції, а другий номер розв'язку.

Загальний розв'язок $x(t)$ рівняння (2.1) визначається звичайною формулою загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння:

$$x(t) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n, \tag{2.2}$$

де $C_1, \cdots, C_n$ - довільні сталі, що визначаються з початкових умов. У матричній формі загальний розв'язок (2.2) має вигляд

$$x(t) = X(t)C, \tag{2.3}$$

де C - матриця-стовпець

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що фундаментальна система розв'язків задовольняє наступним початковим умовам:

$$x_{k,j}(0) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

або в матричній формі

$$X(0) = E,$$

де E – одинична матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо у якомусь розв'язку x_k замінити t на $t+T$, то через періодичність матриці $P(t)$ ми знову отримаємо розв'язок, оскільки вектор $x_k(t+T)$ як і раніше задовольнятиме рівнянню (2.1), якщо йому задовольняв вектор x_k. Отриманий розв'язок не збігатиметься з початковим розв'язком $x_k(t)$, але, як будь-який розв'язок рівняння (2.1), він може бути отриманий із загального розв'язку (2.3) вибором відповідної матриці-стовпця C. Позначивши цю матрицю через A_k, знайдемо

$$x_k(t+T) = X(t)A_k, \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

Якщо відома фундаментальна матриця $X(t)$, то матриця A визначиться з рівності $X(T) = X(0)A = EA = A$:

$$A = X(T) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(T) & \dots & x_{1,n}(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}(T) & \dots & x_{n,n}(T) \end{pmatrix}$$

Матриця A називається *матрицею монодромії.* Існує розв'язок $x(t)$, що задовольняє наступну залежність:

$$x(t+T) = \rho x(t), \tag{2.4}$$

де ρ - деяке стале число (такий розв'язок називають *нормальним*). Будь-який розв'язок рівняння (2.1) можна одержати із загального розв'язку (2.3). Тому якщо нормальний розв'язок існує, то має існувати така постійна матриця-стовпець

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

для якої буде справедлива рівність

$$x(t) = X(t)\beta.$$

Враховуючи, що рівність має виконуватися за всіх t, отримаємо

$$(A - \rho E)\beta = 0.$$

Це матричне рівняння, в якому невідомими є матриця-стовпець і число, еквівалентно n скалярним рівнянням

$$\begin{gathered} (\alpha_{1,1} - \rho)\beta_1 + \alpha_{1,2}\beta_2 + \cdots + \alpha_{1,n}\beta_n = 0 \\ \alpha_{2,1}\beta_1 + (\alpha_{2,2} - \rho)\beta_2 + \cdots + \alpha_{2,n}\beta_n = 0 \\ \alpha_{n,1}\beta_1 + \alpha_{n,2}\beta_2 + \cdots + (\alpha_{n,n} - \rho)\beta_n = 0 \end{gathered}$$

Для того щоб система n алгебраїчних однорідних рівнянь щодо $\beta_1, \cdots, \beta_n$ мала розв'язок, відмінний від нуля, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю:

$$det(A - \rho E) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} - \rho & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - \rho & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} - \rho \end{pmatrix} = 0$$

Кожному кореню ρ_k цього характеристичного рівняння (для простоти будемо припускати, що серед коренів немає кратних) відповідає свій розв'язок $x_k(t)$, що задовольняє умові (2.4). В результаті отримаємо n нормальних розв'язків, що задовольняють умову (2.4):

$$x_1(t + T) = \rho_1 x_1(t), \ \cdots, x_n(t + T) = \rho_n x_n(t).$$

Ця система є лінійно незалежною і може бути прийнята за фундаментальну систему розв'язків. Тут ρ_k – мультиплікатори.

Нормальні розв'язки мають вигляд:

$$x_k(t) = e^{\alpha_k t}\varphi_k(t)(k = 1, \cdots, n),$$

де $\varphi_k(t)$ - періодична матриця-стовпець періоду T

$$\varphi_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,k}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n,k}(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi_k(t+T) = \varphi_k(t)$$

а α_k - постійні числа, звані характеристичними показниками, обчислюються за такою формулою:

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\ln \rho_k, \qquad (k = 1, \cdots n).$$

Перейдемо до вивчення стійкості руху. Будемо вважати, що за фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.1) прийнято систему нормальних розв'язків $x_1, \cdots, x_n$. Загальний розв'язок рівняння (2.1) запишемо у формі (2.2)

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t).$$

Вектор $x(t)$ визначає зображувальну точку , а доданки $C_k x_k(t)$ є його складовими. Через період T положення зображувальної точки визначатиметься рівністю

$$x(t+T) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t+T).$$

Складові цього вектора рівні

$$C_k x_k(t+T) = \rho_k C_k x_k(t).$$

Звідси

$$|C_k x_k(t+T)| = |\rho_k||C_k x_k(t)|.$$

З цього випливають наступні умови стійкості системи, збурений рух якої описується лінійними диференціальними рівняннями з періодичними коефіцієнтами.

- Якщо модулі коренів характеристичного рівняння (2.5) менше одиниці, то незбурений рух $x_1 = \cdots = x_n = 0$ асимптотично стійкий.

- Якщо серед коренів характеристичного рівняння є хоча б один, модуль якого більше одиниці, то незбурений рух нестійкий.

- Якщо серед коренів характеристичного рівняння є такі, модулі яких рівні одиниці, а модулі інших коренів менше одиниці, то незбурений рух стійкий, хоч і не асимптотично.

Зауважимо, що перші два висновки справедливі і при кратних коренях характеристичного рівняння, а останній тільки при простих коренях (точніше, при коренях простих щодо елементарних дільників) [4].

Розділ 3. Межа стійкості

Теорія Флоке-Ляпунова була застосована для дослідження стійкості тривіального розв'язку рівняння (1.15) і, як наслідок, стійкості плоскої поверхні безмежного шару ідеальної рідини.

Для побудови границі області стійкості у просторі визначальних параметрів системи було розроблено програму (див. Додаток). У програмі для заданого хвильового числа та інших параметрів послідовно визначається матриця монодромії, знаходяться мультиплікатори, і за значенням абсолютної величини мультиплікатора робиться висновок про стійкість аналізованої системи.

Межі області стійкості щодо різних значень хвильового числа k наведено на рис.3.1. Область стійкості перебуває нижче наведеної кривої. Для наступних значень фізичних параметрів рідини:

$$\rho = 0.934\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3},\ \alpha = 20.1 * \frac{10^{-3} H}{\text{м}},\ h = 1\ \text{мм},\ \frac{\Omega}{\pi} = 50\ \text{Гц}$$

З графіка видно, що найнебезпечніші збурення мають хвильове число порядку 1000, що відповідає довжині хвилі близько 6 мм.

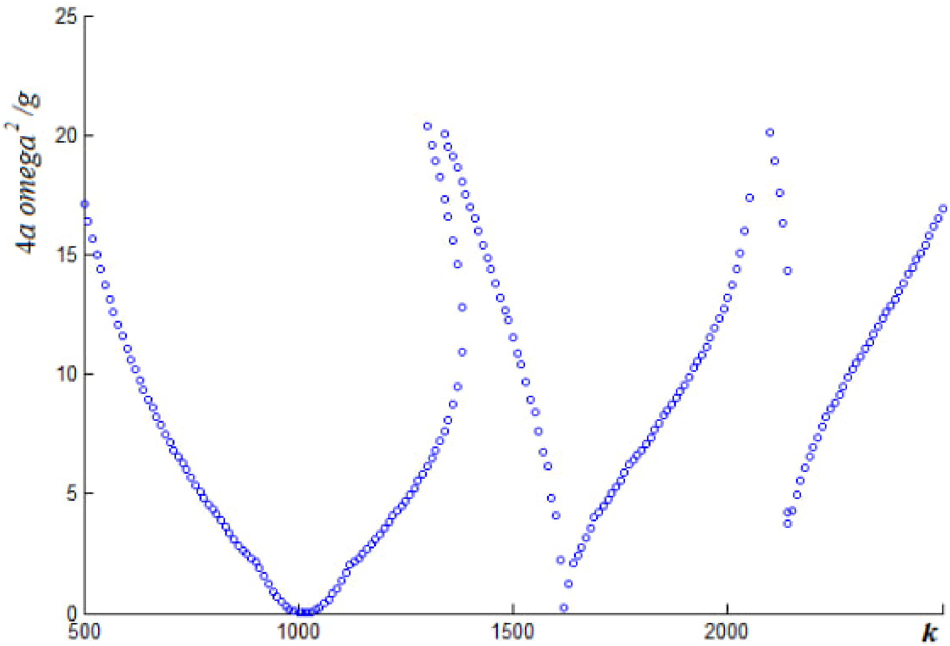

Рис. 3.1: Межа області стійкості

Розділ 4. Врахування нелінійності хвиль

Зі зростанням аплітуди коливань з'являється необхідність врахування нелінійних доданків у рівняннях руху [5]. Зазвичай головний нелінійний доданок має третій ступінь відносно аплітуди коливань.

Нелінійність брижів Фарадея - це явище, пов'язане з взаємодією поверхневих хвиль, що параметрично генеруються, на вільній поверхні ідеальної рідини.

При розгляді параметричних поверхневих хвиль розглядаються дві основні частоти: перша (накачування) і друга (хвиль, що генеруються). Коли перша частота коливань досягає певного значення, відбувається резонансна взаємодія між першою та другою гармоніками. В результаті цієї взаємодії генеруються додаткові гармоніки, що призводить до виникнення брижів на поверхні рідини.

Нелінійність брижів Фарадея полягає в тому, що амплітуди згенерованих хвиль стають нелінійно залежними від амплітуд накачування і хвиль, що генеруються. Це означає, що зміна амплітуди однієї з хвиль може спричинити значні зміни амплітуд інших хвиль, що призводить до нелінійної поведінки системи.

Хвилі Фарадея на поверхні рідини можуть виявляти як хаотичні, так і періодичні рухи залежно від параметрів системи та умов експерименту.

Розглянемо обидва випадки:

1. Хаотичні рухи: У деяких випадках взаємодія між гармоніками хвиль Фарадея може призводити до хаотичних рухів. Хаотичний рух характеризується високою чутливістю до початкових умов, що означає, що малі зміни в початкових параметрах можуть призвести до суттєвих відмінностей у подальшій еволюції системи. Внаслідок хаотичного руху хвилі Фарадея можуть виявляти випадкові, непередбачувані форми та амплітуди, створюючи складні та заплутані хвильові структури на поверхні рідини.

2. Періодичні рухи: В інших випадках, за певних значень параметрів системи, хвилі Фарадея можуть виявляти періодичні рухи. Періодичний рух означає, що система повторює певні форми та амплітуди хвильових структур протягом часу. Ці періодичні рухи можуть бути стабільними або схильні до деяких періодичних флуктуацій, але в цілому повторюються з певною регулярністю.

Важливо, що перехід від хаотичних до періодичних рухів чи навпаки може відбуватися із зміною параметрів системи, наприклад, зміною амплітуди накачування чи частоти коливань. Також варто враховувати, що поведінка хвиль Фарадея може бути дуже чутливою до зовнішніх впливів та умов експерименту, і навіть невеликі зміни можуть призвести до значних змін у динаміці хвиль.

На рис.4.1 зображено межу стійкості для гармонік (4,3) і (7,2) з власною частотою $\omega(4,3) = 7.892$Гц та $\omega(7,2) = 8.1042$Гц відповідно [6]. Хрестики – експериментально визначені точки стійкості границі.Заштриховані області - це області змагань гармонік, тобто поверхня може бути описана як суперпозиція гармонік (4,3) и (7,2) з амплітудами, що мають повільно змінювальну огинаючу.

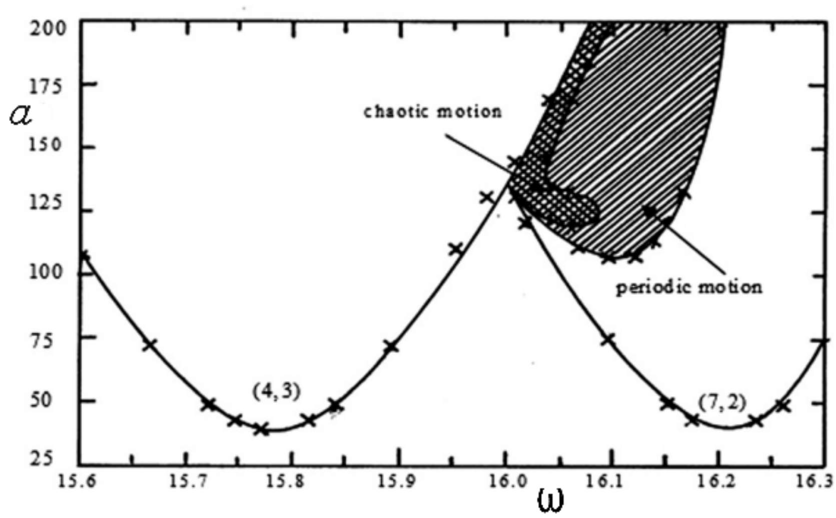

Рис. 4.1: Границі стійкості гармонік (4,3) і (7,2) по амплітуді збудження α та частоті ω коливань круглої посудини радіусом 6,35 см, заповненої на 1 см шаром води. Заштриховані області відносяться до періодичних та хаотичних коливань з конкуренцією між цими гармоніками [6].

Висновки

У роботі розглянуто параметричну нестійкість вільної поверхні рідини в осцилюючому гравітаційному полі, а також досліджується питання врахування нелінійності щодо визначення амплітуди поверхневих хвиль. Зведено вихідну задачу до проблеми стійкості тривіального розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами. Наводяться основні положення теорії Флоке – Ляпунова про стійкість таких розв'язків, а також результати чисельного дослідження стійкості нескінченного шару рідини у вібраційному полі. Побудовано межі області стійкості даної гідродинамічної системи. Розглянуто приклад виникнення нелінійних періодичних та хаотичних коливань.

Додаток

```
hold on
global h g a w ro alpha nu;

h = 0.001;               % товщина шару рідини
alpha = 20.1E-3;         % коеф. поверхневого натягу
ro = 934;                % густина рідини
g = 9.81;
w = 50*pi;               % частота коливань посудини
nu = 1E-5;               % коеф. кінематичної в'язкості
Ni = 21;
Nj = 100;
MON = zeros(2,2);
res = 1;
ind = 0;

for tKi = 500 : 10 : 2500
  resOld = 0;
  aOld = 0;
  ki = tKi;
  for i = 0:2:Ni
    a = 10*i;
```

```
    for m=1:2
      e = zeros(2,1); e(m) = 1;
      [t,x]=ode45('rhsDU',[0 pi/w], e);
      for k=1:2
        MON(k,m) = x(end,k);
      end
    end
    L = eig(MON);
    r_max = abs(L(1) + L(2)) / 2;
    res = 1 - r_max;
    if res*resOld< 0
      aTrue = aOld - resOld*(a - aOld)/(res - resOld);
      plot(ki, aTrue/g, 'bo', 'MarkerSize',2)
    end
    resOld = res;
    aOld = a;
  end
end

function y = rhsDU(t,x)
global  ki h g a w ro alpha nu;
  y = zeros(2,1);
  y(1) = x(2);
  y(2) = - ki * tanh(ki*h)* ( (g + a * cos(2*w*t) +    alpha*
  (ki)^2/ro )*x(1) ); %+  2*ki*nu*x(2)
```

Список використаних джерел

[1] Луковський І.О., Солодун О.В., Тимоха О.М. Математичні проблеми нелінійної динаміки конічних резервуарів з рідиною К:.– 2019. – 224с.

[2] Щоголев С. А. Теорія стійкості руху Одеса : Одеський національний університет імені І. І. Мечникова: – 2017. – 148с.

[3] Kumar K. Linear theory of faraday instability in viscous liquids // Proceedings of the Royal Society of London. – 1996. – V. 452. – P. 1113–1126.

[4] Périnet N., Juric D., Tuckerman L.S. Numerical simulation of Faraday waves // Journal of Fluid Mechanics. – 2009. – V. 635 , 25. – P. 1 – 26.

[5] Raouf A. I. Recent Advances in Physics of Fluid Parametric Sloshing and Related Problems // Journal of Fluids Engineering. - 2015. - V. 137. - P. 1 – 52.

[6] Ciliberto, S., Gollub, J. P. Pattern Competition Leads to Chaos // Physical review letters. – 1984 – V.52(11). – P. 922 – 925.